دوفصلنامه محاسبات و سامانه های توزیع شده
سال چهارم، شماره اول، شماره پیاپی ۷، صفحه ۱۹ تا ۲۴، سال ۱۴۰۰

کاربرد روشهای هموتوپی در مسائل انتقال حرارت

سیدمجتبی میراصغری کلکناری*
مدرس، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، ایران.

چکیده

بیشتر پدیده‌های علمی همچون انتقال حرارت، پدیده‌هایی غیرخطی بوده و توسط معادلات غیرخطی توصیف می‌شوند. بطور کلی برای حل معادلات و مسائل مهندسی سه روش کلی، تجربی، عددی و تحلیلی داریم که روش تحلیلی خود به دو بخش حل تحلیلی دقیق و حل تحلیلی تقریبی تقسیم‌بندی می‌شود. از آنجائیکه در بسیاری از کاربردهای صنعتی و مهندسی با مسائل غیرخطی و پیچیده سروکار داریم و حل دقیق این مسائل وجود ندارد باید به حل‌های عددی یا حل‌های تقریبی تکیه کنیم. اخیراً روش‌های هموتوپی مورد توجه بسیاری از محققین علم انتقال حرارت قرار گرفته است. یکی از این روش‌های تقریبی که روش پرتور بیشن نام دارد از روشهای قدیمی‌تر محسوب می‌شود و محدودیت‌ها برای حل معادلات غیرخطی دارد. بنابراین برای غلبه بر مشکلات و محدودیت های روش پرتوربیشن، اخیراً روشهای جدیدتری برای حل مسائل مطرح شده اند که از جمله این روشها، روش هموتوپی پرتوربیشن (HPM) و روش حساب تغییرات تکراری (VIM) می‌باشد که این روشها قابلیت حل معادلات غیرخطی از نوع شدید را دارند و می‌توان برای مسائل مختلفی در حوزه مهندسی از جمله انتقال حرارت از آنها استفاده نمود. در این مقاله معادله انتقال حرارت سرد شدن سیستم فشرده که تحت مکانیزم‌های جابجایی و تشعشع قرار دارد را توسط دو روش HPM ,VIM حل و نتایج را با هم مقایسه می‌نمائیم.

کلمات کلیدی: انتقال حرارت، روشهای هموتوپی، روش هموتوپی پرتوربیشن، روش حساب تغییرات تکراری.

تاریخچه مقاله:

تاریخ ارسال: ۱۴۰۰/۰۲/۱۹
تاریخ اصلاحات: ۱۴۰۰/۰۳/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۲۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۰۶/۳۱

Keywords:

Optimization,
Response to the user's Search,
Features Selection,
Genetics Algorithm and Fuzzy Systems

*ایمیل نویسنده مسئول:
m_mirasghari@yahoo.com

Application of Homotopy methods in heat transfer Problems

M. Mirasgari Kalkenari

Department Engineering, Islamic Azad university of karaj, Iran.

Abstract

Most scientific phenomena, such as heat transfer, are nonlinear phenomena and are described by nonlinear equations.In general, we have three general, numerical and analytical methods for solving equations and engineering problems. The analytical method itself is divided into two parts: exact analytical solution and approximate analytical solution.Since we deal with complex and nonlinear problems in many industrial and engineering applications and there is no exact solution to these problems, we have to rely on numerical or approximate solution methods.Recently, hematopoietic methods have been considered by many researchers in the science of heat transfer.One of these approximation methods, called the porturbation method, is one of the older methods and has limitations for solving nonlinear equations.To overcome the problems and limitations of this method, newer methods for solving problems have recently been proposed, such as the hemotopic method of portorbation (HPM) and the method of c alculating repetitive changes (VIM), which have the ability to solve nonlinear equations of the extreme type.They can be used for various problems in the field of engineering, including heat transfer.In this paper, we solve the equation of heat transfer of cooling of a compact system under the mechanisms of convection and radiation by two methods (HPM and VIM) and compare the results.

Keywords: Optimization, Response to the user's Search, Features Selection , Genetics Algorithm and Fuzzy Systems.

۱ – مقدمه

بسیاری از پدیده‌های علمی از جمله پدیده انتقال حرارت بصورت غیرخطی رخ می‌دهند. از آنجائیکه حل تحلیلی دقیق برخی از مسائل غیرخطی بسیار مشکل یا غیر ممکن است، حلهای تحلیلی تقریبی(هموتوپی) مورد توجه بسیاری از محققین علم انتقال حرارت قرار گرفته است و از اهمیت ویژه ای در حوزه مسائل مهندسی برخوردار است[۹].

در مورد انتقال حرارت از صفحات گرم مثل انتقال حرارت از روی صفحات الکتریکی، مرکز رآکتورهای هسته‌ای، گرم‌کننده‌های خورشیدی که با هوا سرد می‌شوند، در برخی صفحات داخلی سردشونده توربین‌ها و یا در طراحی سیستم‌های تبرید و سردخانه و تهویه مطبوع، مسائلی مطرح می‌شوند که همگی غیرخطی بوده و در برخی شرایط فرضیاتی خطی در نظر می‌گیرند که در اصل این فرضیات غیرخطی‌اند.حل اغلب معادلات فوق وقت‌گیر و دشوار بوده و تحلیل خطی معمولی در بسیاری از این کاربردها مطلوب نمی‌باشند. بنابراین باید روشی که شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد را به کار برد. این روشها توسط چندین محقق به منظور حل انواع زیادی از مسائل خطی و غیرخطی استفاده شده است[۷و۸].

روش پرتوربیشن از روشهایی تقریبی است که در تحلیل مسائل مهندسی غیرخطی بکار برده می‌شود ولی بدلیل محدودیت هایی که دارد چندان مورد توجه قرار نمی‌گیرد از جمله این محدودیت‌ها عبارتند از[۳]:

۱) تقریباً همه روشهای پرتوربیشنی براساس یک فرض استوار است که یک پارامتر کوچک باید در معادله وجود داشته باشد. این پارامتر کوچک کاربردهای تکنیک پرتوبیشن را به اندازه زیادی محدود می‌کند. چرا که بسیاری از مسائل غیرخطی خصوصاً مسائل غیرخطی از نوع قوی (شدید) فاقد پارامترهای کوچک می‌باشند.

۲) تعیین این پارامتر کوچک کاری مشکل است و به تکنیک‌های خاصی نیاز دارد. یک انتخاب صحیح و مناسب پارامتر کوچک به نتایج منطقی و مطلوب منجر می‌شود. در حالیکه یک انتخاب نادرست اثرات بدی به دنبال دارد.

۳) حتی اگر یک پارامتر کوچک مناسب وجود داشته باشد در بسیاری موارد، روش پرتوربیشن فقط برای مقادیر خیلی کوچک از این پارامتر معتبر است و برای مسائل غیرخطی از نوع شدید (قوی) اعتباری ندارد و همچنین در برخی مسائل ما با قاطعیت کوچکی این پارامتر را نمی‌توانیم تعیین کنیم.

اخیراً روشهای حل تحلیلی تقریبی جدیدی مطرح شده‌اند که مورد توجه بسیاری از محققین علم انتقال حرارت و ریاضی قرار گرفته است. از جمله این روشها، روش هموتوپی پرتوربیشن (HPM)، حساب تغییرات تکراری (VIM)، هموتوپی تحلیلی(HAM)و.. می‌باشند که این روشها نه تنها برای معادلات غیرخطی ضعیف، بلکه برای معادلات غیرخطی شدید نیز معتبر بوده و جواب بدست آمده برای کل ناحیه جواب معتبر است و به هیچ پارامتر کوچکی وابسته نیست[۱]. در این مقاله ما معادله انتقال حرارت سرد شده سیستم فشرده که تحت مکانیزم‌های جابجایی و تشعشع قرار می‌گیرد را به دو روش VIM , HPM مورد تحلیل قرار داده ونتایج را مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

۲ – اساس روش هموتوپی پرتوربیشن (HPM)

این روش یکی از روشهای کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد که علاوه بر سادگی برای دسته وسیعی از معادلات غیرخطی در مهندسی قابل اعمال می‌باشد که با استفاده از شرایط مرزی و اولیه معادله، می‌توان حدس اولیه را تقریب زد[۶]. برای نشان دادن اصول این روش معادله دیفرانسیلی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم[۴].

$$A(u) - f(r) = 0 \qquad (۱)$$

با شرایط مرزی:

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \qquad (۲)$$

که A یک عملگرد دیفرانسیلی کلی، f(r) یک تابع تحلیلی معلوم و B یک عملگر مرزی و Γ مرز حوزه Ω می‌باشد.

در حالت کلی عملگر غیرخطی A می‌تواند به دو قسمت خطی L و غیرخطی N تقسیم شود بنابراین داریم :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \qquad (۳)$$

براساس تکنیک هموتوپی می‌توان یک هموتوپی بصورت $(v, p) : \Omega \times [0,1] \rightarrow R$ ساخت بطوریکه معادله زیر را ارضا می‌کند:

(۴)

$$H(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega$$

که در معادله فوق $p \in [0,1]$ و u_0 یک حدس اولیه از معادله اصلی می‌باشد که در حالت کلی شرایط مرزی را ارضا می‌کند. در معادله فوق زمانی که p=0 باشد یک معادله خطی داریم و زمانی که p=1 باشد به معادله غیرخطی اولیه (۱) می‌رسیم یعنی با افزایش P از صفر به یک، $v(r/p)$ از $u_0(r)$ به $u(r)$ تبدیل می‌شود که این تغییر اساس روش HPM

می‌باشد. در این روش از p به عنوان پارامتر کوچک استفاده می‌شود و فرض می‌شود که جواب معادله را بتوان برحسب یک سری توانی از p بصورت زیر نوشت:

$$v = u_0 + u_1 p + u_2 p^2 + \dots \qquad (۵)$$

در نهایت با حد رابطه فوق زمانی که P به سمت یک میل می کند می‌توان جواب تقریبی معادله را بدست آورد یعنی :

$$u = \lim_{p \to 1} v = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \qquad (۶)$$

۳ – اساس روش حساب تغییرات تکراری (VIM)

این روش نیز یک روش مناسب و موثر برای حل تقریبی مسائل و معادلات غیرخطی می‌باشد و می‌توان با یک تکرار به حل با دقت بالایی برسیم و حلهای تقریبی بدست آمده در تمام حوزه حل معتبرند.

برای نشان دادن اصول این روش در ابتدا یک معادله دیفرانسیل غیرخطی به فرم کلی زیر را در نظر می‌گیریم[۴و۳] :

$$Lu + Nu = g(x) \qquad (۷)$$

که L یک عملگر دیفرانسیلی خطی و N یک عملگر دیفرانسیلی غیرخطی می‌باشد. بر اساس این روش می‌توان یک تابع صحیح با فرمول تکرار بصورت زیر نوشت :

(۸)

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(Lu_n(\tau) + N\tilde{u}_n(\tau) - g(\tau))d\tau$$

که در معادله فوق، λ به عنوان ضریب لاگرانژ، $\tilde{u}_n$ یک متغیر محدود ($\delta\tilde{u}_n = 0$) و اندیس n بیانگر تقریب n ام می‌باشد.

ضریب لاگرانژ با استفاده از تئوری حساب تغییرات بدست می‌آید که برای اینکار میتوان از طرفین معادله فوق دیفرانسیل کامل گرفت و با حل آن λ بدست آید که هر چه این ضریب دقیق‌تر باشد جواب حاصله از این روش نیز دقیق‌تر خواهد بود. در این روش در هر گام که به جلو می‌رویم تمامی جملات قبلی از جواب را نتیجه می‌دهد و نیازی به نوشتن جواب نهایی بصورت یک سری نیست.

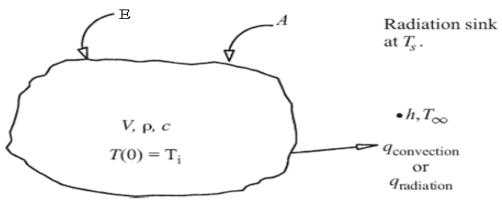
۴– حل معادله انتقال حرارت سرد شدن سیستم فشرده تحت نمانیزم های جابجایی و تشعشع

معادله حاکم بر سیستم بصورت

(۹)

$$\begin{cases} \rho VC\dfrac{dT}{dt} + hA(T - T_a) + E\sigma A(T^4 - T_S^4) = 0 \\ t = 0 \to T = T_i \end{cases}$$

می‌باشد که در زمان t=0 دمای آن T_i می‌باشد که در شکل زیر نشان داده شده است[۵].



Cooling of a lumped thermal capacity body.

(شکل-۱): سرد شدن سیستم فشرده تحت مکانیزم‌های جابجایی و تشعشع

در سیستم فشرده ظرفیت حرارتی جسم به صورت انباشت در نظر گرفته می‌شود و از گرادیان دما در داخل جسم صرف نظر می‌شود. با استفاده از پارامترهای بی بعد زیر :

(۱۰)

$$\theta = \frac{T}{T_i}, \theta_a = \frac{T_a}{T_i}, \theta_s = \frac{T_s}{T_i}, \tau = \frac{t}{\rho Vc / hA}, \varepsilon = \frac{E\sigma T_i^3}{h}$$

و با فرض $\theta_a = \theta_s = 0$، فرم ساده شده معادله بصورت زیر در می‌آید :

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta(\tau)}{d\tau} + \theta(\tau) + \varepsilon\theta(\tau)^4 = 0 \\ \tau = 0 \to \theta = 1 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

معادله فوق یک معادله غیرخطی از درجه ۴ می‌باشد که حل دقیق آن موجود نیست. ما در اینجا به حل معادله به روشهای تقریبی VIM , HPM می‌پردازیم.

الف) حل به روش HPM :

برای حل معادله (۱۱) طبق تکنیک هموتوپی، با جدا کردن بخشهای خطی و غیرخطی معادله، جواب معادله را برای ده جمله اول بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\theta = \theta_0 + p\theta_1 + p^2\theta_2 + \ldots + p^{10}\theta_{10} \qquad (12)$$

و با جاگذاری معادله (۱۲) در معادله هموتوپی (۴) و مرتب کردن آن بر اساس توانهای مختلف p می‌توانیم جملات مختلف تقریب را بدست آوریم که در این صورت داریم:

(۱۳)

$$\left.\begin{array}{l} p^o : \dfrac{d\theta_o}{d\tau} + \theta_o = 0 \\ \tau = 0 \;, \theta_o = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_o(\tau) = e^{-\tau}$$

(۱۴)

$$\left.\begin{array}{l} p^1 : \dfrac{d\theta_1}{d\tau} + \theta_1 + \varepsilon\theta_o^{\,4} = 0 \\ \tau = 0 \;, \theta_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1(\tau) = \left(\frac{1}{3}\varepsilon e^{-3\tau} - \frac{1}{3}\varepsilon\right)e^{-\tau}$$

و به همین ترتیب مابقی جملات را تا بدست می‌آوریم و با جاگذاری جملات مختلف در رابطه θ و اعمال $p \to 1$ جواب نهایی برای ده جمله اول بدست می‌آید که بدلیل زیاد بودن جملات از آوردن آنها در اینجا صرف نظر کرده ایم ولی منحنی ده جمله اول در نمودارها آمده است.

ب) حل به روش VIM :

در این روش با ساختن فرمول تکرار زیر:

(۱۵)

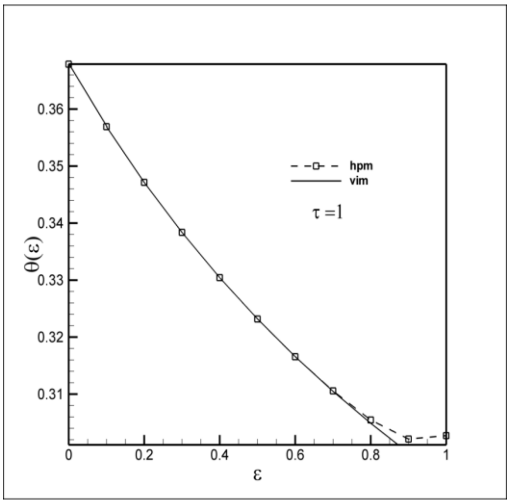
$$\theta_{n+1}(\tau) = \theta_n(\tau) + \int_0^{\tau} \lambda \left\{ \frac{d\theta_n(t)}{dt} + \theta_n(t) + \varepsilon\tilde{\theta}_n^{4}(t) \right\} dt$$

و با متغیرگیری از طرفین معادله فوق، ضریب لاگرانژ بصورت $\lambda = -e^{t-\tau}$ بدست می آید.

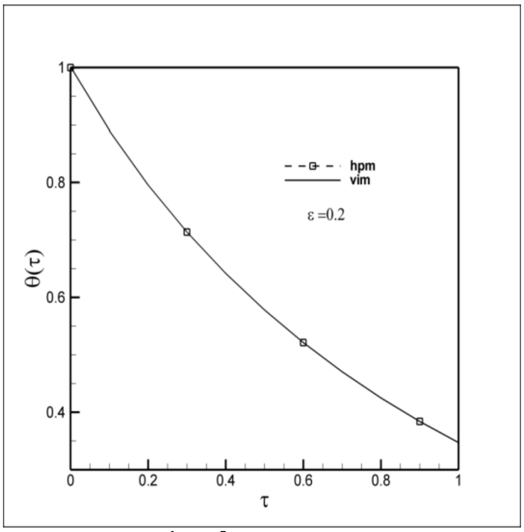
حال با جاگذاری λ در معادله فرمول تکرار (۱۵) و با انتخاب دلخواه تقریب اولیه بصورت $\theta_o(\tau) = e^{-\tau}$ که در شرایط اولیه صدق می کند می‌توانیم جملات بعدی را بدست آوریم که در این صورت $\theta_1(\tau)$ بصورت زیر می‌باشد :

$$\theta_1(\tau) = e^{-\tau} - \tfrac{1}{3}\varepsilon e^{-\tau} + \tfrac{1}{3}\varepsilon e^{-4\tau} \qquad (16)$$

و به همین روال $....., \theta_4(\tau), \theta_3(\tau), \theta_2(\tau)$ را بدست آورده ایم که بدلیل زیاد بودن تعداد جملات از آوردن آن در اینجا خودداری کرده‌ایم ولی منحنی پنج جمله اول در نمودارها آمده است. مقایسه بین روشهای VIM, HPM در نمودارهای (۱-۴) آمده است.

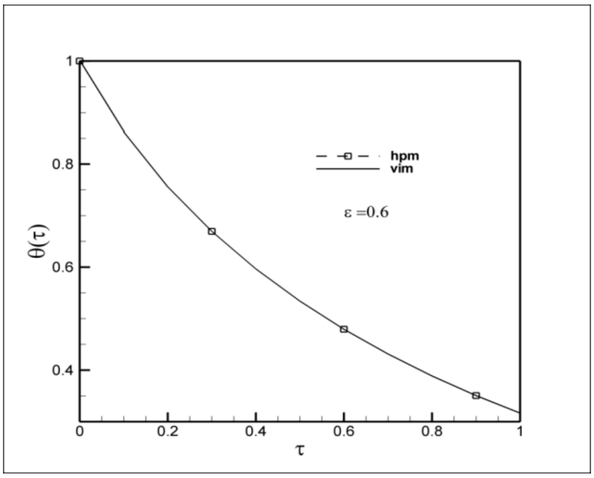


(نمودار-۱) : مقایسه بین hpm و vim به ازای τ=۱

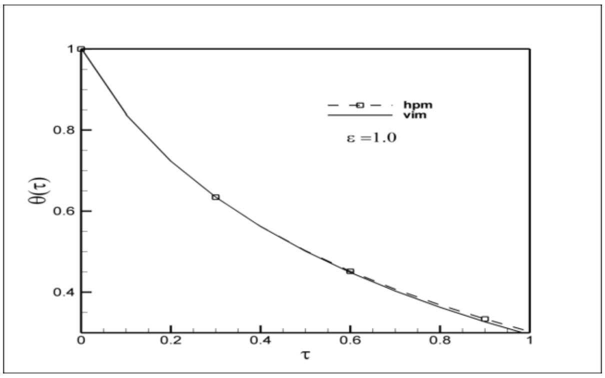


(نمودار-۲): مقایسه بین hpm و vim به ازای ε=۰/۲

دوفصلنامه محاسبات و سامانه های توزیع شده
سال سوم، شماره اول، شماره پیاپی ۷، صفحه ۱۹ تا ۲۴، سال ۱۴۰۰



(نمودار-۳): مقایسه بین **hpm** و **vim** به ازای ε=۰/۶



(نمودار-۴): مقایسه بین **hpm** و **vim** به ازای ε=۱

در این نمودارها می‌بینیم که روشهای VIM , HPM بسیار بهم نزدیک بوده و قابلیت حل معادلات غیرخطی را دارند و به پارامتر کوچک وابسته نیستند.

۵- نتیجه گیری

۱) روشهای HPM و VIM قابلیت حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی را دارند و بسیار بهم نزدیک می‌باشند.

۲) این روشها به پارامتر کوچک وابسته نیستند بلکه برای مقادیر بزرگ نیز معتبر بوده و به روش پرتوبیشن مزیت دارد.

۳) در روش HPM جواب نهایی بصورت یک سری بیان می‌شود ولی در روش VIM در هر گام که به جلو می‌رویم تمامی جملات قبلی از جواب را نتیجه می‌دهد و نیازی به نوشتن جواب نهایی بصورت یک سری نیست پس سرعت همگرایی بیشتر است.

۴) این روشها برای حل اینگونه مسائِل تقریبی بوده و کاربردهای زیادی داشته و ممکن است روش های مشابهی برای اینگونه مسائل پیشنهاد شود تا با راه حل مناسب تری به دست آید.

۶ – مراجع

[1] Adem Kılıcman, Analyttic Approximate Solutions For Fluid Flow in The Presence Of Heat and Mass Transfer, (27.12.2017)

[2] Ji-Huan He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, Applied Mathematics and Computation, Volume 156, Issue 2, 2004, 527-539.

[3] Ji-Huan He, Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: some examples, International Journal of Non-Linear Mechanics, 34 (1999) 699–708.

[4] Ji-Huan He, Homotopy perturbation technique, Computer methods in applied mechanics and engineering, 178 (1999) 257–262.

[5]A. Aziz, T.Y. Na, Perturbation Method in Heat Transfer, Hemisphere Publishing corporation, Washington, DC, 1984.

[6] A. Rajabi, Homotopy perturbation method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity, Physics Letters A, in press, doi:10.1016/j.physleta.2006.11.062.

[7]Khan, Y., Two-dimensional boundary layer flow of chemical reaction MHD fluid over a shrinking sheet with suction and injection, J. Aerosp. Eng., 27 (2014), 5, pp. 04014019.

[8]Khan, Y., Latifizadeh, H., Application of new optimal homotopy perturbation and Adomian decomposition methods to the MHD non-Newtonian fluid flow over a stretching

sheet, Inter. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow, 24 (2014), 1, pp. 124-136.

[9]M.Mirasghari,M.Kazemi, Application of perturbation and variational iteration method in nonlinear heat transfer,(29.12.2016)

سید مجتبی میراصغری کلکناری مدرک کارشناسی خود را در رشته مهندسی مکانیک گرایش حرارت و سیالات در سال۱۳۸۵ از دانشگاه مازندران و کارشناسی ارشد خود را در رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی در سال ۱۳۸۸ از دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان اخذ کرده است.ایشان در حال حاضر به عنوان مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج مشغول به تدریس است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان: انرژی های نو، انتقال حرارت، طراحی ساختمانهای صفر انرژی، معادلات غیر خطی.

M_mirasghari@yahoo.com

روش ارجاع به مقاله: م. میراصغر کلکناری. کاربرد روشهای هموتوپی در مسائل انتقال حرارت. دوفصلنامه محاسبات و سامانه های توزیع شده سال چهارم، شماره اول، شماره پیاپی ۷، صفحه ۱۹ تا ۲۴، سال ۱۴۰۰.

How to cite: M. Mirasgari Kalkenari. Application of Homotopy methods in heat transfer roblems , Journal of Distributed Computing and Systems(JDCS), Vol 4, Issue 1, Page 19-24, 2021.